

MÉTODO DE MONTE CARLO NA ANÁLISE DE INCERTEZAS DE UM MODELO MECÂNICO

Luísa N. Hoffbauer¹ e Carlos C. António²

¹Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP), Instituto Politécnico do Porto

²Faculdade de Engenharia (FEUP), Universidade do Porto

RESUMO

Os modelos matemáticos são usados com frequência como ferramentas para analisar o comportamento de estruturas, o que permite o desenvolvimento de projetos estruturais com melhor desempenho e fiabilidade. No caso de materiais compósitos, as variações nos parâmetros de fabrico e a heterogeneidade dos materiais são fatores que introduzem incertezas e afetam o comportamento da estrutura e, como tal, devem ser consideradas no projeto estrutural. Neste trabalho, a propagação de incertezas em estruturas compósitas é analisada usando simulação. O estudo tem por base a replicação do modelo subjacente das variáveis de entrada (Método de Monte Carlo) e, usando o Método dos Elementos Finitos (MEF), permite a obtenção de valores da resposta estrutural para cada valor simulado. Esses valores representam concretizações da variável aleatória resposta estrutural obtendo-se assim uma aproximação da função densidade de probabilidade da resposta. O conhecimento desses valores é usado para calcular o valor médio e o desvio-padrão da resposta, assim como a probabilidade de falha. Para hierarquizar as variáveis de entrada, são utilizados os coeficientes de regressão standardizados.

Palavras e frases chave: Propagação de incertezas, Estruturas compósitas, Método de Monte Carlo, Probabilidade de falha.

1. INTRODUÇÃO

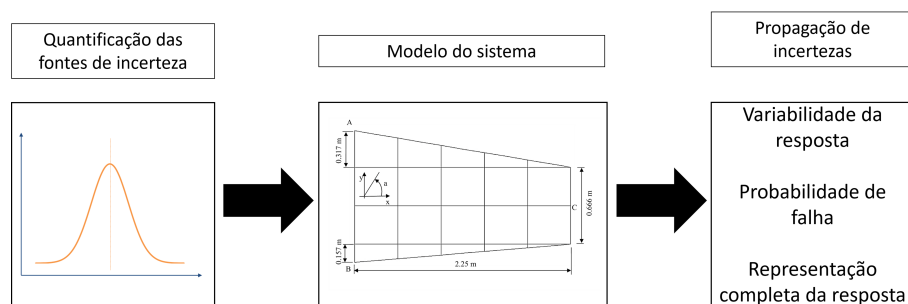


Figura 1: Esquema geral para a análise de incertezas.

O recurso a materiais compósitos laminados em todos os tipos de estruturas tem aumentado nos últimos anos, sobretudo nas indústrias aeroespacial, automóvel e naval. As variações nos parâmetros de fabrico, no controlo de qualidade e a heterogeneidade dos materiais, são alguns dos fatores que introduzem incerteza nos materiais compósitos afetando o desempenho das aplicações estruturais destes materiais.

Daí a necessidade de uma análise da propagação de incertezas que permita analisar a influência da propagação das incertezas na resposta estrutural do ponto de vista quantitativo e qualitativo, identificando as interações e as sinergias das variáveis de entrada. Por outro lado, devido ao número elevado de variáveis, intrínseco às estruturas compósitas, é importante determinar como a incerteza na resposta estrutural pode ser atribuída às diversas variáveis de entrada, o que permite identificar as mais importantes.

Na Figura 1 está representado um esquema geral para o tratamento das incertezas proposto por Sudret. Este esquema decompõe-se em três fases: a definição do modelo matemático, representando o comportamento físico do sistema considerado, a caracterização probabilística das incertezas nos parâmetros de

entrada e a propagação das mesmas incertezas ao longo do modelo. A modelização de um sistema mecânico requer, pois, a definição das variáveis básicas (que descrevem a geometria do sistema, as propriedades do material e as cargas aplicadas), das variáveis resposta (como deslocamentos, deformações, tensões) e da relação entre estas várias quantidades. Essa relação é dada por um conjunto de equações diferenciais cuja solução aproximada é obtida utilizando o Método dos Elementos Finitos.

2. PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

Modelo do sistema: A partir das equações do movimento, é possível obter um sistema de equações diferenciais que, juntamente com as condições fronteira, constitui o problema de valor fronteira (PVF) associado à estrutura. A solução aproximada do PVF associado à estrutura pode ser determinada utilizando métodos como os de Ritz, de Galerkin e outros. Esses métodos, em geral, permitem o tratamento de problemas relativamente simples e simétricos em termos de geometria, carregamento e condições fronteira. O MEF foi desenvolvido a partir do método dos resíduos pesados, permitindo o tratamento de problemas de complexidade mais próxima da das situações reais. O MEF é pois uma técnica numérica muito poderosa para resolver PVF associados à mecânica estrutural.

Fontes de incerteza: O vetor das variáveis de entrada consideradas como variáveis aleatórias não correlacionadas do sistema estrutural é denotado por $\mathbf{X} = [E_1, E_2, Y, S]$ sendo E_1 o módulo elástico longitudinal, E_2 o módulo elástico transversal, Y a resistência transversal em tração e S a resistência ao corte. Estas são as propriedades mecânicas mais importantes e com mais influência na aleatoriedade da resistência do laminado de acordo com o modelo numérico proposto por António et al baseado na Teoria Clássica das placas laminadas. Podem, no entanto, ser consideradas mais variáveis aleatórias nesta análise de incertezas, não havendo perda de generalidade na formulação apresentada.

Variável resposta: número de Tsai: Define-se o número de Tsai, $\bar{R}$, como sendo a razão entre a tensão máxima admissível e a tensão aplicada. A região de segurança está relacionada com $\bar{R} > 1$ e significa que a carga pode aumentar do factor multiplicativo igual a $\bar{R}$ até se atingir o estado de falha. Se $\bar{R} < 1$ a lâmina está em falha e a carga aplicada deve ser reduzida de um factor $\bar{R}$. A carga de falha está associado a $\bar{R} = 1$. Esta definição está, no entanto, limitada ao caso em que se admite comportamento linear geométrico e material dos laminados e das estruturas.

O método usado consiste em replicar o modelo das variáveis de entrada usando o método de Monte Carlo. Para cada valor simulado, usa-se o Método dos Elementos Finitos para a obtenção do número de Tsai associado a esse valor simulado. Os números de Tsai obtidos permitem determinar a média e o desvio padrão da resposta, a probabilidade de falha (percentagem de valores inferiores a 1) assim como o histograma e a curva da função densidade de probabilidade que melhor se ajusta.

3. APLICAÇÃO A ESTRUTURAS COMPÓSITAS

Consideremos um painel compósito asa de avião representado na Figura 1. A espessura do painel é de 0.015 m. A estrutura é encastrada nos lados lineares (AB) e livre nos lados opostos. É aplicada uma carga vertical de 4000N com direção perpendicular relativamente ao plano OXY no ponto C. A estrutura é constituída por um laminado do sistema compósito carbono/resina de epóxico. Um laminado angle-ply balanceado com oito camadas e sequência de empilhamento $[+30^\circ / -30^\circ / +45^\circ / -45^\circ]$ impondo condições de simetria. O ângulo da camada é medido relativamente ao eixo dos x dos eixos coordenados de referência.

Todas as camadas têm a mesma espessura. A análise estrutural é baseada no modelo de Elementos Finitos de casca desenvolvido por Ahmad, com desenvolvimentos posteriores por Figueiras. Este elemento casca é obtido de um elemento tridimensional utilizando um processo degenerativo. É um elemento isoparamétrico com 8 nós e 5 graus de liberdade por nó - três translações e duas rotações - baseado na teoria de cascas de Mindlin.

O vetor das variáveis aleatórias é $\mathbf{X} = [E_1, E_2, Y, S]$ onde

$$E_1 \sim N(181.00, 10.860)GPa$$

$$E_2 \sim N(10.30, 0.618)GPa$$

$$Y \sim N(40.00, 2.400)MPa$$

$$S \sim N(60.00, 4.080)MPa$$

4. RESULTADOS

O método de Monte Carlo (10000 simulações) é usado para estudar o comportamento do número de Tsai. Na Figura 2 está representada a relação entre as propriedades do material e o número de Tsai. Os gráficos

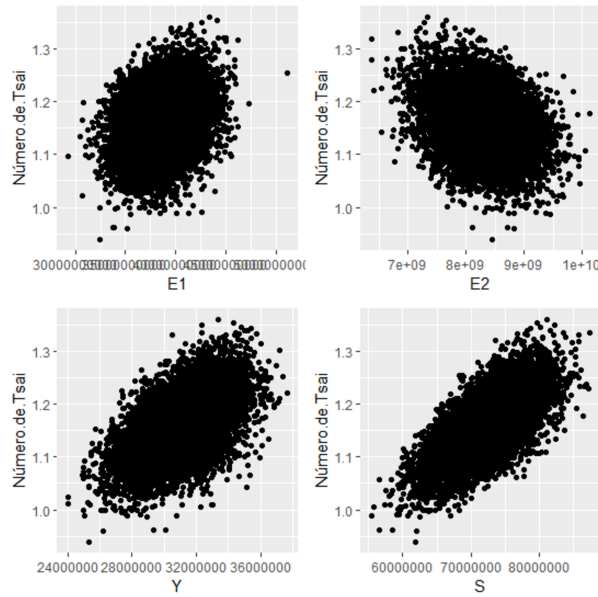


Figura 2: Relação entre as variáveis de entrada e a resposta.

sugerem uma relação linear, sendo pois possível usar os coeficientes de regressão estandardizados para hierarquizar as variáveis de entrada. Na Figura 3 está representada a função densidade de probabilidade aproximada do Número de Tsai que sugere uma distribuição normal; a probabilidade de falha que se estima é 0.2%, a média 1.159 e o desvio-padrão 0.0546. O gráfico de barras representa a hierarquização das variáveis de entrada utilizando a regressão. A variável mais importante é a resistência ao corte, S.

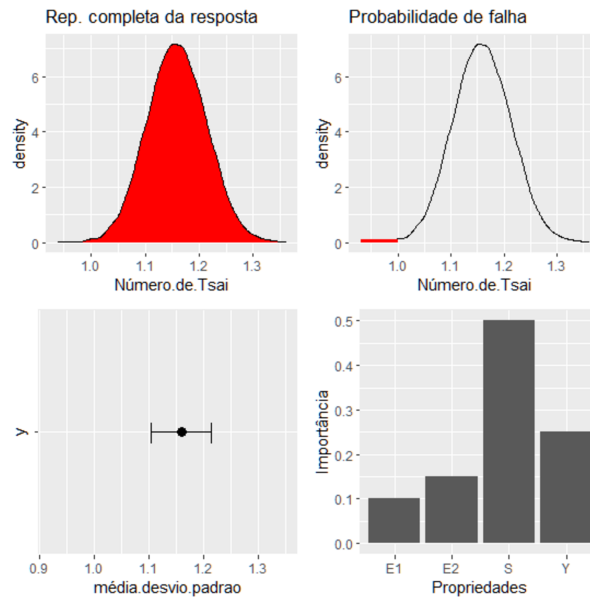


Figura 3: Comportamento da resposta e hierarquização das variáveis de entrada.

5. CONCLUSÕES

O método de Monte Carlo é usado para simular o comportamento do número de Tsai e são determinadas medidas de importância dos parâmetros de entrada na incerteza da resposta estrutural.

Observa-se que a resistência ao corte S é a variável aleatória mais importante.

A análise de propagação de incertezas é muito útil no projeto de estruturas compósitas laminadas, minimizando os efeitos indesejáveis das incertezas dos parâmetros de entrada.

REFERÊNCIAS

- Sudret, B. (2007) Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models - Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods, Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.
- Conceição António, C., Torres Marques, A., Soeiro, A. (1993) Influence of physical properties randomness in laminated composites strength, Proceedings of ICCM-9, Madrid-Spain. University of Zaragoza and Woodhead Publishing.
- Ahmad S., Irons B., Zienkiewicz, O.C., (1970) Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2:419-451.
- Figueiras, J.A., (1983) Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells, Ph.D. Thesis, University College of Swansea, UK.